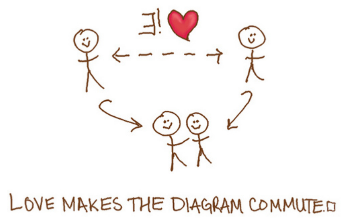
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Wintersemester 2017/2018

Ingo Blechschmidt

Gentzens Kalkül natürlichen Schließens



Strukturelle Regeln

$$\frac{}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \varphi} \qquad \frac{\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \qquad \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \chi} \qquad \frac{\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi}{\varphi[\vec{s}/\vec{x}] \vdash_{\vec{y}} \psi[\vec{s}/\vec{x}]} \ (\vec{y} \text{ in } \varphi \text{ und } \psi \text{ nicht gebunden})$$

Regeln zur Konjunktion

$$\frac{}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \top} \qquad \frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \varphi} \qquad \frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \qquad \varphi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \wedge \chi}$$

Regeln zur Disjunktion

$$\frac{}{\bot \vdash_{\vec{x}} \varphi} \qquad \frac{}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \varphi \vee \psi} \qquad \frac{}{\psi \vdash_{\vec{x}} \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash_{\vec{x}} \chi \qquad \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\varphi \vee \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}$$

Doppelregel zur Implikation

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \chi \\ \hline\hline \varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \Rightarrow \chi \end{array}$$

Regeln zur Existenz- und Universalquantifikation

$$\frac{\varphi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\exists y\!:\!Y.\, \varphi \vdash_{\vec{x}} \psi} \ (y \text{ nicht frei in } \psi) \qquad \frac{}{\varphi \ \vdash_{\vec{x},y} \exists y\!:\!Y.\, \varphi}$$

$$\frac{\varphi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\varphi \vdash_{\vec{x}} \forall y\!:\!Y.\, \psi} \ (y \text{ nicht frei in } \varphi) \qquad \frac{}{\forall y\!:\!Y.\, \varphi \ \vdash_{\vec{x},y} \varphi}$$

Regeln zur Gleichheit

$$\frac{}{\top \vdash_x x = x} \qquad \frac{}{(\vec{x} = \vec{y}) \wedge \varphi \vdash_{\vec{z}} \varphi[\vec{y}/\vec{x}]}$$

(„$\vec{x} = \vec{y}$“ ist Abkürzung für „$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$“.)

Zusätzliche Regel in klassischer Logik: tertium non datur

$$\frac{}{\top \vdash_x \varphi \vee \neg\varphi}$$

Kleenes Realisierbarkeitssemantik

$r \Vdash \top$	$:\Longleftrightarrow$	$\top$
$r \Vdash \bot$	$:\Longleftrightarrow$	$\bot$
$r \Vdash s = t$	$:\Longleftrightarrow$	$[\![s]\!] = [\![t]\!]$
$r \Vdash (\varphi \wedge \psi)$	$:\Longleftrightarrow$	$(K(r) \Vdash \varphi) \wedge (L(r) \Vdash \varphi)$
$r \Vdash (\varphi \vee \psi)$	$:\Longleftrightarrow$	$(K(r) = 0 \wedge L(r) \Vdash \varphi) \vee (K(r) = 1 \wedge L(r) \Vdash \psi)$
$r \Vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$	$:\Longleftrightarrow$	$\forall s : \mathbb{N}.\ (s \Vdash \varphi) \Rightarrow (M_r(s)$ is defined and $M_r(s) \Vdash \psi)$
$r \Vdash (\forall x : N.\ \varphi)$	$:\Longleftrightarrow$	$\forall x_0 : \mathbb{N}.\ (M_r(x_0)$ is defined and $M_r(x_0) \Vdash \varphi[\underline{x_0}/x])$
$r \Vdash (\exists x : N.\ \varphi)$	$:\Longleftrightarrow$	$L(r) \Vdash \varphi[\underline{K(r)}/x]$

Die Kripke–Joyal-Semantik

Hier für den Fall von Topoi von Garben über Örtlichkeiten.
Der nötige Formelrückzug ist notationell unterdrückt.

$U \models s = t : F$	$:\Longleftrightarrow$	$[\![s]\!] = [\![t]\!] \in F(U)$
$U \models s \in m$	$:\Longleftrightarrow$	$[\![s]\!] \in [\![m]\!](U)$
$U \models \top$	$:\Longleftrightarrow$	$\top$
$U \models \bot$	$:\Longleftrightarrow$	$U = \bot$
$U \models \varphi \wedge \psi$	$:\Longleftrightarrow$	$U \models \varphi$ and $U \models \psi$
$U \models \bigwedge_{j \in J} \varphi_j$	$:\Longleftrightarrow$	for all $j \in J$: $U \models \varphi_j$ (J an index set)
$U \models \varphi \vee \psi$	$:\Longleftrightarrow$	~~$U \models \varphi$ or $U \models \psi$~~ there exists a covering $U = \bigcup_i U_i$ such that for all i: $U_i \models \varphi$ or $U_i \models \psi$
$U \models \bigvee_{j \in J} \varphi_j$	$:\Longleftrightarrow$	~~$U \models \varphi_j$ for some $j \in J$~~ (J an index set) there exists a covering $U = \bigcup_i U_i$ such that for all i: $U_i \models \varphi_j$ for some $j \in J$
$U \models \varphi \Rightarrow \psi$	$:\Longleftrightarrow$	~~$U \models \varphi$ implies $U \models \varphi$~~ for all open $V \subseteq U$: $V \models \varphi$ implies $V \models \psi$
$U \models \forall s : F.\ \varphi$	$:\Longleftrightarrow$	~~for all sections $s_0 \in F(U)$: $U \models \varphi[s_0/s]$~~ for all open $V \leq U$ and all sections $s_0 \in F(V)$: $V \models \varphi[s_0/s]$
$U \models \exists s : F.\ \varphi$	$:\Longleftrightarrow$	~~there exists a section $s_0 \in F(U)$ such that $U \models \varphi[s_0/s]$~~ there exists an open covering $U = \bigcup_i U_i$ such that for all i: there exists $s_0 \in F(U_i)$ such that $U_i \models \varphi[s_0/s]$

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Wintersemester 2017/2018
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Erste Schritte mit intuitionistischer Logik*

Beweise:

(a) $\varphi \Longrightarrow \neg\neg\varphi$

(b) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

(c) $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

(d) $(\forall x\,{:}\,X.\ \neg\varphi(x)) \Longleftrightarrow \neg(\exists x\,{:}\,X.\ \varphi(x))$

(e) $\forall n\,{:}\,\mathbb{N}.\ n = 0 \vee n \neq 0$

(f) $\forall n\,{:}\,\mathbb{N}.\ \forall m\,{:}\,\mathbb{N}.\ n = m \vee n \neq m$

Aufgabe* 2. *Surjektionen und Injektionen*

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei die Urbildoperation $P(Y) \to P(X)$, $U \mapsto f^{-1}[U]$ injektiv. In dieser Situation folgt, dass f surjektiv ist.

(a) Schreibe zunächst den erstbesten Beweis dieser Behauptung auf, der dir in den Sinn kommt. Dieser ist vermutlich nur klassisch zulässig.

(b) Bewundere, wie viel kürzer und eleganter der intuitionistische Beweis ist.

Aufgabe 3. *Minima von Mengen natürlicher Zahlen I*

Zeige:

(a) Hat jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen ein Minimum, so gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. *Tipp.* Betrachte für eine Aussage φ die Menge $M := \{n\,{:}\,\mathbb{N} \mid n = 1 \vee \varphi\}$.

(b) Jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen besitzt *nicht nicht* ein Minimum.

(c) Jede bewohnte herauslösbare Menge natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum.
Hinweis. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann *herauslösbar*, wenn jedes Element aus $\mathbb{N}$ in M enthalten ist oder nicht.

(d) Sei V ein endlicher erzeugter Vektorraum (über einem kommutativen Ring K mit $\forall x\,{:}\,K.\ \neg(\ulcorner x \text{ inv.}\urcorner) \Rightarrow x = 0$). Dann besitzt V *nicht nicht* eine Basis.

Aufgabe 4. *Brouwersche Gegenbeispiele*

(a) Zeige: Falls jede (schwach) monoton fallende Folge natürlicher Zahlen stabilisiert, so gilt das beschränkte Allwissenheitsprinzip.

(b) Zeige: Ist jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ endlich erzeugt, so gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. *Tipp.* Betrachte für eine Aussage φ das Ideal(?) $\mathfrak{a} := \{x\,{:}\,\mathbb{Z} \mid x = 0 \vee \varphi\}$.

Aufgabe 5. *Erste Schritte im Kalkül natürlichen Schließens*

Finde für folgende Sequenzen Ableitungen in Gentzens Kalkül natürlichen Schließens.

(a) $(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_{\vec{x}} ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(b) $(x = y) \vdash_{x,y} (y = x)$

(c) $(\exists y\,{:}\,Y.\ \varphi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} (\varphi \wedge (\exists y\,{:}\,Y.\ \psi))$ (dabei darf y nicht in φ vorkommen)

Übungsblatt 2 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Beispiele für lokale Operatoren*

(a) Rechne in Minimallogik nach, dass die Doppelnegation ein lokaler Operator ist.
Zur Erinnerung. Die drei Forderungen sind $\varphi \Rightarrow \nabla\varphi$, $\nabla\nabla\varphi \Rightarrow \nabla\varphi$ und $\nabla(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \nabla\varphi \wedge \nabla\psi$.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Die *Regularisierung* einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\nabla U := \operatorname{int} \operatorname{clos} U$, das Innere des Abschlusses von U. Weise für alle offenen Teilmengen $U, V \subseteq X$ in klassischer Logik folgende Inklusionen nach.

$$U \subseteq \nabla U \qquad \nabla\nabla U \subseteq \nabla U \qquad \nabla(U \cap V) = \nabla U \cap \nabla V.$$

Aufgabe 2. *Rechenregeln zu lokalen Operatoren*

Sei ∇ ein lokaler Operator. Zeige in informaler Minimallogik:

(a) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\nabla\varphi \Rightarrow \nabla\psi)$

(b) $(\nabla\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \nabla\psi)) \Longrightarrow \nabla\psi$

Aufgabe 3. *Beweistransformationen*

Sei ∇ ein lokaler Operator modulo einer Theorie T, seien also Forderungen an einen lokalen Operator intuitionistisch modulo T ableitbar.

(a) Zeige: Ist φ eine geometrische Formel, so ist $\nabla\varphi \dashv\vdash_{\vec{x}} \varphi^\nabla$ intuitionistisch modulo T ableitbar.

(b) Zeige: Ist $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ modulo T intuitionistisch ableitbar, so auch $\varphi^\nabla \vdash_{\vec{x}} \psi^\nabla$ modulo T^∇.

(c) Ergänze deinen Beweis, um folgenden Zusatz nachzuweisen: Ist $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ modulo T in klassischer Logik ableitbar, so ist $\varphi^{\neg\neg} \vdash_{\vec{x}} \psi^{\neg\neg}$ modulo $T^{\neg\neg}$ in Minimallogik ableitbar.

(d) Zeige, dass HA die $\neg\neg$-Übersetzungen aller Axiome von PA nachweist.

Aufgabe 4. *Induktion bis ω^2*

(a) Finde eine explizite zahlentheoretische Definition einer Relation $\prec$, welche man in einem Mengenlehrekontext als „vom Ordnungstyp ω^2“ bezeichnen würde.

(b) Beweise in HA, dass die Ordnung $(\prec)$ fundiert ist. Zeige also, dass in dem um ein einstelliges Relationssymbol $\varphi(n)$ mit dem Axiom

$$\top \vdash \forall n\colon N.\ (\forall m\colon N.\ m \prec n \Rightarrow \varphi(m)) \Rightarrow \varphi(n)$$

erweiterten Kalkül die Sequenz $\top \vdash \forall n\colon N.\ \varphi(n)$ ableitbar ist.

Übungsblatt 3 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Induktion bis* $\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}$

(Kommt gleich.)

Aufgabe 2. *Intuitionistische primitiv-rekursive Arithmetik*

Das System IPRA ist dasselbe wie PRA, nur ohne das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. Zeige: Eine Sequenz ist genau dann in PRA ableitbar, wenn sie es in IPRA ist.

Tipp. Zeige, dass $\top \vdash_{n,m} n = m \vee \neg(n = m)$ in IPRA ableitbar ist. Dann Induktion über den Formelaufbau.

Aufgabe 3. *Eine logikfreie Darstellung von* PRA

Das System $\mathrm{PRA}^=$ ist über derselben Signatur wie PRA formuliert (0, s, $+$, $\cdot$ und Funktionssymbole für alle weiteren primitiv-rekursiven Abbildungsrezepte), als Formeln sind aber nur Identitätsbehauptungen $s = t$, wobei s und t Terme sind (in denen freie Variablen vorkommen dürfen), erlaubt. Eine Formel von $\mathrm{PRA}^=$ ist genau dann *ableitbar*, wenn es einen sie bezeugenden Beweisbaum gibt, der nur folgende Schlussregeln verwendet:

$$\frac{}{s = s} \qquad \frac{s = t \qquad s = u}{t = u} \qquad \frac{s = t}{s[u/x] = t[u/x]} \qquad \frac{s = t}{f(s) = f(t)}$$

$$\frac{f(0) = g(0) \qquad f(s(x)) = h(x, f(x)) \qquad g(s(x)) = h(x, g(x))}{f(x) = g(x)}$$

Gib eine im Formelaufbau rekursive Übersetzungsvorschrift $\varphi \mapsto \varphi^=$ von Formeln in PRA zu Formeln in $\mathrm{PRA}^=$ an, sodass

(a) PRA für jede Formel φ die Sequenzen $\varphi \dashv\vdash_{\vec{x}} \varphi^=$ zeigt und

(b) genau dann eine Sequenz $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ in PRA ableitbar ist, wenn die Formel $(\varphi \Rightarrow \psi)^=$ in $\mathrm{PRA}^=$ ableitbar ist.

Tipp. Die Monusoperation ist für die Übersetzung von $\wedge$ und $\vee$ hilfreich. Um zu zeigen, dass sich Verwendungen der Induktionsregel übertragen lassen, kann man ausnutzen, dass $\mathrm{PRA}^=$ die Formel $x = xy$ zeigt, wenn $\mathrm{PRA}^=$ die Formel $x \dot{-} xy = 0$ zeigt.

Aufgabe 4. *Beispiele für primitiv-rekursive Funktionen*

Finde für folgende Funktionen Abbildungsrezepte, die nur 0, succ und die Projektionen sowie Komposition und primitive Rekursion verwenden: Vorgängerfunktion pred, Addition, Monus ($n \dot{-} m = n - m$, falls $n \geq m$, und 0 sonst), δ ($\delta(n, m) = 1$ genau dann, wenn $n = m$, und 0 sonst).

Aufgabe 5. *Die Cantorsche Paarungsfunktion*

Sei $J : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $J(x, y) \mapsto (x + y)(x + y + 1)/2 + x$.

(a) Zeige, dass J nur mit den Grundrezepten $0, \mathsf{succ}, (+), (\cdot), \delta$ sowie Komposition und beschränkter Minimierung ausgedrückt werden kann.

(b) Finde Abbildungsrezepte K und L, aus denselben Zutaten zusammengesetzt, sodass PRA zeigt, dass $K(J(x, y)) = x$ und $L(J(x, y)) = y$.

Tipp. Man kann sowas machen wie $K(z) = (2z \dot{-} f(2z))/2$, wobei $f(a)$ die kleinste Zahl mit $f(a) \cdot (f(a) + 1) \leq a$ und $(f(a) + 1) \cdot (f(a) + 2) > a$ ist.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie — Wintersemester 2017/2018
Universität Augsburg — Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Undefinierbarkeit von Wahrheit*

(a) Sei S ein IQ umfassendes formales System mit adäquater Gödelnummerierung. Existiere ein *Wahrheitsprädikat für S*, eine Formel True mit freier Variable n, sodass $S \vdash (\mathrm{True}[\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}/n] \Leftrightarrow \varphi)$ für alle Formeln φ. Zeige, dass S inkonsistent ist.

(b) Präzisiere, wie man in ZFC und in PA glauben könnte, mittels Rekursion ein Wahrheitsprädikat für ZFC bzw. PA definieren zu können, und arbeite genau heraus, wo die Verfahren fehlschlagen.

Hinweis. In ZFC könnte man so beginnen: „Wir definieren eine Abbildung true : $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ wie folgt durch Rekursion. Ist n die Gödelkodierung einer Konjunktion $(\varphi \wedge \psi)$, so sei $\mathrm{true}(n) := \mathrm{true}(\ulcorner\varphi\urcorner) \cdot \mathrm{true}(\ulcorner\psi\urcorner)$. Ist n die Kodierung einer Allaussage $(\forall x.\ \varphi)$, so sei $\mathrm{true}(n)$ genau dann 1, wenn $\mathrm{true}(\ulcorner\varphi[M/x]\urcorner) = 1$ für alle Mengen M, und Null sonst. Und so weiter.“

(c) Erkläre, wie man für jede natürliche Zahl n ein Quasiwahrheitsprädikat konstruieren kann, für das die Bedingung aus (a) nur für Formeln φ mit höchstens n logischen Zeichen erfüllt zu sein braucht.

Aufgabe 2. *Löbs Theorem*

Sei S ein formales System, das IQ umfasst und bezüglich einer fixierten Gödelnummerierung rekursiv axiomatisierbar ist. Erfülle das Beweisbarkeitsprädikat die HBL-Bedingungen. Zeige für jede Formel φ von S: Genau dann ist in S die Implikation $\mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \Rightarrow \varphi$ ableitbar, wenn φ selbst ableitbar ist.

Tipp. Verwende das Diagonaliserungslemma, um eine Formel ψ mit $S \vdash (\psi \Leftrightarrow (\mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner\psi\urcorner}) \Rightarrow \varphi))$ zu finden.

Aufgabe 3. *Lange Beweise*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine schnell wachsende primitiv-rekursive Funktion.

(a) Konstruiere mit dem Diagonalisierungslemma eine Formel α von HA mit freier Variable n, die ausdrückt: „Ich bin nicht mit weniger als $f(n)$ Schritten beweisbar.“

(b) Zeige in einer starken Metatheorie (etwa konstruktiver Mengenlehre): Für alle Zahlen $m \in \mathbb{N}$ ist $\alpha[\underline{m}/n]$ in der Tat nicht in weniger als $f(m)$ Schritten beweisbar.

(c) Wie lang war deine Lösung von (b)? Fällt dir etwas auf? Inspiziere deinen Beweis genauer, um einzusehen: Es gibt einen kurzen HA-Beweis von $(\mathrm{Con}(\mathrm{HA}) \Rightarrow \alpha)$.

Aufgabe 4. *Im Umfeld von Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz*

(a) Zeigt PA wenigstens $(\mathrm{Con}(\mathrm{PA}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}))$?

(b) Stimmt sowas wie „Genau dann ist S konsistent, wenn S seine Inkonsistenz zeigt.“?

(c) Ist $S \vdash (\varphi \Rightarrow \mathrm{Prov}_S(\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}))$ zu erwarten? Wie steht's um die Umkehrung?

(d) Zeige: Alle Gödelsätze eines formalen Systems S wie in Gödel II sind äquivalent.

Tipp. Zeige für jede Formel φ mit $S \vdash (\gamma \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prov}_S(\underline{\ulcorner\gamma\urcorner}))$, dass $S \vdash (\gamma \Leftrightarrow \mathrm{Con}(S))$.

Aufgabe 5. *Die Hilbert–Bernays–Löb-Bedingungen*

Weise nach, dass für eine sinnvolle Gödelnummerierung das Beweisbarkeitsprädikat $\mathrm{Prov}_{\mathrm{HA}}$ die HBL-Bedingungen erfüllt:

(a) Falls $\mathrm{HA} \vdash \varphi$, dann auch $\mathrm{HA} \vdash \mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.

(b) $\mathrm{HA} \vdash (\mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Rightarrow \mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \urcorner}))$.

(c) $\mathrm{HA} \vdash (\mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \varphi \Rightarrow \psi \urcorner}) \wedge \mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Rightarrow \mathrm{Prov}(\underline{\ulcorner \psi \urcorner}))$.

Bemerkung. Zur Bearbeitung kommt man umhin, eine Gödelnummerierung explizit angeben zu müssen.

Aufgabe 6. *Varianten von rekursiver Axiomatisierbarkeit*

Sei eine adäquate Gödelnummerierung für die Formeln einer Signatur Σ fixiert. Wir betrachten die folgenden drei Eigenschaften von Formelmengen M: Es gibt eine

(1) partielle berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$,

(2) totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oder

(3) totale primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

sodass für jede Formel φ gilt: Genau dann $f(\ulcorner \varphi \urcorner) = 1$, wenn $\varphi \in M$.

Zeige: Hat eine Menge M Eigenschaft (1) oder (2), so gibt es eine Menge M' mit Eigenschaft (3), sodass für jede Formel φ gilt: Genau dann ist φ eine Konsequenz von M in Minimallogik (oder intuitionistischer Logik, oder klassischer Logik), wenn φ eine Konsequenz (in derselben Logik) von M' ist.

Tipp. Ersetze Formeln φ durch äquivalente Formeln wie $\underline{n} = \underline{n} \wedge \varphi$, wobei n etwas mit dem Ablaufverhalten von beteiligten Turingmaschinen zu tun hat.

Übungsblatt 5 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Elementare Äquivalenz*

Sei S ein formales System. Modelle von S heißen genau dann *elementar äquivalent*, wenn in ihnen dieselben Formeln gelten.

(a) Definiere, was ein Isomorphismus von S-Strukturen sein soll, und zeige: Isomorphe Modelle sind elementar äquivalent. Gilt die Umkehrung?

(b) Erfülle S die Voraussetzungen des Vollständigkeitssatzes. Zeige: Genau dann sind je zwei S-Modelle zueinander elementar äquivalent, wenn S anonym vollständig ist ($\neg(S \not\vdash \varphi \wedge S \not\vdash \neg\varphi)$ für alle Formeln φ).

(c) Sei S ein System wie in Gödel I. Sei S zudem klassisch und konsistent. Zeige: Es gibt $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ viele paarweise nicht zueinander elementar äquivalente Modelle von S.

Tipp. Finde mit Gödel I und dem Vollständigkeitssatz zunächst zwei solche Modelle.

(d) Sei φ eine Formel, in der nur $\top \bot = \wedge \vee \exists$ vorkommen. Zeige: Falls $\mathbb{N} \models \varphi$, so HA $\vdash \varphi$.

Aufgabe 2. *Formalisierung des Vollständigkeitssatzes*

Formalisiere Gödels Vollständigkeitssatz für rekursiv axiomatisierbare Systeme in HA.

Tipp. Sei also S ein bezüglich einer fixierten Gödelnummerierung rekursiv axiomatisierbares klassisches System. Zeige, dass es eine Formel α von HA mit einer freien Variable x gibt, sodass HA beweist, dass sich α wie ein Modell von S verhält: Für alle Axiome n von S gilt $\alpha[n/x]$; und $\alpha[\mathrm{and}(n,m)/x] \Leftrightarrow \alpha[n/x] \wedge \alpha[m/x]$ für alle Zahlen n und m, die Gödelkodierungen von S-Formeln sind; und so weiter für die restlichen Klauseln. Denke insbesondere über die formale Umsetzung der im Beweis des Vollständigkeitssatzes vorkommenden Rekursion nach.

Aufgabe 3. *Die universelle Maschine*

Mit dem *Rekursionssatz* und anderen Grundlagen aus der Berechenbarkeitstheorie kann man zeigen: Es gibt eine Turingmaschine M, die systematisch alle Beweise von PA absucht und, sobald sie einen Beweis einer Aussage der Form „Es ist nicht der Fall, dass M mit Ausgabe $\underline{n}$ hält“ findet, mit Ausgabe n hält.

(a) Zeige: Für keine Zahl n zeigt PA, dass es nicht der Fall ist, dass M mit n hält.

(b) Folgere: Für jede natürliche Zahl n gibt es ein Modell von PA, in dem die Aussage „M hält mit Ausgabe $\underline{n}$“ stimmt. Was passiert, wenn man in diesem Modell M ausführt?

Aufgabe 4. *Nichtstandardmodelle von Peano-Arithmetik*

Ein *Nichtstandardmodell* von PA ist ein Modell, das *Nichtstandardzahlen* enthält: Elemente, die nicht von der Form $[\![s]\!]^n([\![0]\!])$ für $n \in \mathbb{N}$ sind.

(a) Sei M ein Nichtstandardmodell. Sei φ eine Formel von PA mit einer freien Variable x. Beweise in klassischer Logik das *Überlaufprinzip*: Falls φ in M für alle Standardzahlen gilt, so gibt es eine Nichtstandardzahl, für die φ ebenfalls in M gilt.

Tipp. Es gilt also für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$: $M \models \varphi[\underline{n}/x]$. Falls die Behauptung falsch ist, dann $M \models \forall x\colon N.\ (\varphi \Rightarrow \varphi[s(x)/x])$.

(b) Mache dir ein Bild von Nichtstandardmodellen von PA.

Tipp. Jedes Nichtstandardmodell enthält eine Nichtstandardzahl x_0. Da PA zeigt, dass nur die Null kein Nachfolger ist, gibt es in PA auch eine Zahl, die den Namen „$x_0 - 1$“ verdient hat. Gibt es so etwas wie $x_0/2$?

(c) Zeige: Existiert ein zu $\mathbb{N}$ elementar äquivalentes Nichtstandardmodell von PA, in dem es nichtstandard Primzahlzwillinge gibt, so folgt die Primzahlzwillingsvermutung.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg Wintersemester 2017/2018
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 6 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Manchmal sind alle Funktionen stetig*

(a) Zeige, dass die Behauptung „für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt es eine Turingmaschine M mit $f(n) = M(n)$ für alle $n : \mathbb{N}$“ realisiert wird.

*(b) Zeige unter Annahme von Markovs Prinzip (MP) auf dem Metaniveau:

$$\Vdash \forall f : \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^\mathbb{N})}.\ \forall \alpha : \mathbb{N}^\mathbb{N}.\ \exists N : \mathbb{N}.\ \forall \beta : \mathbb{N}^\mathbb{N}.\ (\forall m < N.\ \alpha(m) = \beta(m)) \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

Hinweis. Achtung, nicht leicht. Hole dir einen Tipp ab. In der Mittwochsvorlesung wird die Lösung verraten.

(c) Wieso ist die Signumfunktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ nicht realisierbar?

Hinweis. Die Trägermenge der Assembly $\mathbb{R}$ besteht aus all den *berechenbaren* reellen Zahlen. Das sind solche Zahlen x, für die eine Turingmaschine M existiert, sodass $|x - M(n)| \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$. Ein Realisierer für eine solche reelle Zahl ist der Index einer solchen Turingmaschine. In der Ungleichung muss die natürliche Zahl $M(n)$ auf eine (willkürliche, aber ein für alle mal fixierte Art und Weise) als Kodierung einer rationalen Zahl interpretiert werden.

(d) Mache unter Annahme von MP plausibel: $\Vdash$ (Jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig).

Aufgabe 2. *Scheinbar unmögliche Programme*

(a) Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Zeige: $\not\Vdash \forall f : \mathbb{B}^\mathbb{N}.\ (\exists n : \mathbb{N}.\ f(n) = 1) \vee (\forall n : \mathbb{N}.\ f(n) = 0)$.

Tipp. Zeige, dass aus dieser Formel intuitionistisch die bekanntermaßen nicht realisierte Formel „jede Turingmaschine hält oder hält nicht“ folgt. Verwende sowas wie „M hat nach n Schritten bereits gehalten“.

(b) Wie kann man die Menge $\overline{\mathbb{N}}$ der schwach monoton steigenden Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ als Vervollständigung von $\mathbb{N}$ ansehen? Zeige, dass $\overline{\mathbb{N}}$ ein Retrakt von $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ ist.

(c) Zeige unter Annahme von MP: $\Vdash \forall f : \mathbb{B}^{\overline{\mathbb{N}}}.\ (\exists n : \overline{\mathbb{N}}.\ f(n) = 1) \vee (\forall n : \overline{\mathbb{N}}.\ f(n) = 0)$.

Tipp. Zeige zunächst: $\Vdash \forall f : \mathbb{B}^{\overline{\mathbb{N}}}.\ \exists N : \mathbb{N}.\ \forall \beta : \overline{\mathbb{N}}.\ (\forall m < N.\ \beta(m) = 0) \Rightarrow f(\beta) = f(0^\infty)$. Das folgt aus Aufgabe 1(b) und der Tatsache, dass $\overline{\mathbb{N}}$ ein Retrakt von $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ ist. Mit „0^∞“ ist die Nullfunktion gemeint.

Aufgabe 3. *Eine rekursive Variante von Skolems Paradoxon*

Sei X eine maßvolle Menge (modest set). Sei $f : \mathbb{N} \to X$ ein Morphismus von maßvollen Mengen. Sei die Abbildung $|f| : \mathbb{N} \to |X|$ zwischen den zugrunde liegenden Trägermengen surjektiv. Erkläre, wieso die Aussage „f ist surjektiv“ nicht notwendigerweise realisiert wird, wohl aber die Aussage „$\forall x : X.\ \neg\neg(\exists n : \mathbb{N}.\ f(n) = x)$“. Wieso ist das kein Widerspruch zur Gültigkeit von Markovs Prinzip?

Aufgabe 4. *Zum Auswahlaxiom*

(a) Zeige, dass „jede Surjektion $Y \to \mathbb{N}$ besitzt ein Präinverses“ realisiert wird.

(b) Sei X eine maßvolle Menge, für die eine Turingmaschine M existiert, die kanonische Realisierer berechnet: Falls $n \Vdash x$, so auch $M(n) \Vdash x$, und falls zudem $n' \Vdash x$, so $M(n) = M(n')$. Zeige: $\Vdash$ (Jede Surjektion $Y \to X$ besitzt ein Präinverses).

(c) Glaubst du, dass „jede Surjektion $Y \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ besitzt ein Präinverses“ realisiert wird?

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Der Kleene-Baum*

Sei D folgende Turingmaschine: „Lese eine Zahl n ein. Berechne durch Simulation $M_n(n)$ (möglicherweise terminiert das nicht). Ist das Ergebnis nicht Null, so gib Null aus; andernfalls gib 1 aus.“ Sei $K \subseteq \{0,1\}^\star$ die Menge derjenigen endlichen 0/1-Folgen w, sodass für alle i mit $0 \leq i < |w|$ und der Eigenschaft, dass die Berechnung von $D(i)$ in höchstens $|w|$ Schritten mit einem Wert a_i terminiert, gilt: $w_i = a_i$. Dabei ist $|w|$ die Länge von w.

(a) Zeige: Jedes Wort aus $\{0,1\}^\star$ liegt in K oder nicht.

(b) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gibt es ein Wort w der Länge n, das in K liegt.

(c) Sei $\alpha \in |\mathbb{B}^\mathbb{N}|$. Zeige, dass eine Zahl n mit $[\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)] \notin K$ existiert.
Zur Erinnerung. Es ist $|\mathbb{B}^\mathbb{N}|$ die Menge der berechenbaren Funktionen $\mathbb{N} \to \{0,1\}$.

(d) Konstruiere eine berechenbare unbeschränkte Funktion $f : |\mathbb{B}^\mathbb{N}| \to \mathbb{N}$.

(e) Das *schwache Lemma von Kőnig* (WKL) besagt: Jeder unendliche binäre Baum besitzt einen unendlichen Pfad. Verifiziere WKL klassisch.

(f) Zeige, dass WKL im Realisierbarkeitsmodell auf starke Art und Weise fehlschlägt.
Hinweis. Dafür genügt es, die ersten drei Teilaufgaben intuitionistisch zu bearbeiten.

Aufgabe 2. *Erste Schritte im Realisierbarkeitstopos zu Superturingmaschinen*

Welche der folgenden Aussagen gelten im mit Superturingmaschinen statt gewöhnlichen Maschinen gebauten Realisierbarkeitsmodell?

(a) Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ gibt es eine Zahl n mit $f(n) = 1$, oder $f = 0$.

(b) Jede Funktion $\mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist stetig.

(c) Jede reelle Zahl ist gleich Null oder entfernt von Null.

(d) Es gilt das schwache Lemma von Kőnig.

Aufgabe 3. *Eine wundersame Injektion*

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Gib ein Element von $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ an, das nicht im Bild von f liegt.

(b) Auf der MFPS XVII fragten sich die Leute: Kann man intuitionistisch zeigen, dass es keine Injektion $\mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt? Verifiziere Andrej Bauers negative Antwort, indem du im STM-Realisierbarkeitsmodell eine solche Injektion angibst.

Aufgabe 4. *Fundierte Bäume*

Ein *abzählbar verzweigter Baum* ist eine unter Verkürzung abgeschlossene bewohnte Menge $T \subseteq \mathbb{N}^\star$ endlicher Listen von Zahlen. Ein solcher Baum ist genau dann *fundiert*, wenn für jede Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Zahl m mit $\overline{\alpha}(m) := [\alpha(0), \ldots, \alpha(m-1)] \notin T$ existiert.

(a) Wie kann eine STM einen abzählbar verzweigten Baum auf Fundiertheit testen?

(b) Zeige: Superturingmaschinen können die Zugehörigkeit zu Π^1_1-Mengen entscheiden.
Hinweis. Verwende ohne Beweis: Eine Π^1_1-Menge ist von der Form $X = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall \alpha : \mathbb{N}^\mathbb{N}.\ \exists m : \mathbb{N}.\ R(x, \overline{\alpha}(m))\}$, wobei R eine Relation ist, die durch eine Turingmaschine entschieden werden kann. Drücke damit „$x \in X$“ über die Fundiertheit eines gewissen Baums aus.

Übungsblatt 8 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Zum Zwischenwertsatz*

Sei $\mathbb{R}$ über dedekindsche Schnitte oder über Cauchyprozesse konstruiert. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine punktweise stetige Funktion mit $f(0) < 0$ und $f(0) > 0$. Sei f streng monoton steigend. Zeige ohne Verwendung von Auswahlaxiomen, dass f eine Nullstelle besitzt.

Tipp. Werfe eine Münze. Zeigt sie Kopf, so verifiziere vom Schnitt (L, U) mit $L = \{x : \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee (0 \leq x \leq 1 \wedge f(x) < 0)\}$ und $U = \{x : \mathbb{Q} \mid x > 1 \vee (0 \leq x \leq 1 \wedge f(x) > 0)\}$, dass er eine Nullstelle von f ist. Zeigt sie Zahl, so gib einen geeigneten konvergenten Cauchyprozess an. Um eine ε-Näherung zu konstruieren, ist es hilfreich, Punkte $0 = a_0 < \cdots < a_N = 1$ mit $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$ zu wählen.

Aufgabe 2. *Das beschränkte Allwissenheitsprinzip in der Analysis*

Das *beschränkte Allwissenheitsprinzip* besagt: Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ existiert entweder eine Zahl n mit $f(n) = 1$, oder $f(n) = 0$ für alle n. Zeige: Genau dann gilt das beschränkte Allwissenheitsprinzip, wenn $x = 0$ oder $x \# 0$ für alle (über Cauchy*folgen* konstruierte) reelle Zahlen x.

Hinweis. Verwende folgende Definition. Eine Folge $(x_n)_n$ ist genau dann eine *Cauchyfolge*, falls $|x_n - x_m| \leq 1/(n+1) + 1/(m+1)$ für alle $n, m : \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. *Grundlegendes zu dedekindschen Schnitten*

(a) Sei $L \subseteq \mathbb{Q}$ eine Menge, die die Bedingungen (a), (b) und (c) an einen dedekindschen Schnitt erfüllt (bewohnt, nach unten abgeschlossen, nach oben offen). Existiere eine Zahl, die nicht in L liegt. Definiere eine Menge U derart, dass in klassischer Logik (L, U) ein dedekindscher Schnitt ist. Was geht intuitionistisch schief?

(b) Zeige, dass für $\mathbb{Q}$-wertige Cauchyprozesse α, β gilt:

$$\exists \varepsilon, \delta : \mathbb{Q}_{>0}.\ \exists x \in \alpha(\varepsilon), y \in \beta(\delta).\ x < y - \varepsilon - \delta \quad \Longleftrightarrow$$
$$\exists \mu : \mathbb{Q}_{>0}.\ \forall \omega, \eta \leq \mu.\ \forall x \in \alpha(\omega), y \in \beta(\eta).\ x < y - \omega - \eta.$$

Aufgabe 4. *Minima von Folgen natürlicher Zahlen*

Bestimme die Dialectica-Interpretation der Aussage „jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ besitzt *nicht nicht* ein Minimum“ ($\forall f.\ \neg\neg\exists n.\ \forall m.\ f(n) \leq f(m)$) und beweise die so erhaltene Aussage.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Wintersemester 2017/2018

Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Die Lindenbaum-Algebra als Rahmen*

Zeige ohne Verwendung des Auswahlaxioms, dass die Lindenbaum-Algebra einer propositionalen geometrischen Theorie $\mathbb{T}$ wie in der Vorlesung behauptet ein Rahmen ist. Gehe wenn du möchtest auch auf mengentheoretische Schwierigkeiten ein.

Hinweis. Die Klasse aller Formeln über $\mathbb{T}$ ist im Allgemeinen zu groß, um eine Menge zu sein. Die Lindenbaum-Algebra von $\mathbb{T}$ lässt sich trotzdem als Menge realisieren. Dabei geht wesentlich ein, dass jede Formel äquivalent zu einer beliebigen Disjunktion von endlichen Konjunktionen von atomaren Propositionen ist.

Aufgabe 2. *Beispiele für klassifizierende Örtlichkeiten*

Die klassifizierenden Örtlichkeiten der folgenden Theorien sind jeweils die zugehörigen Örtlichkeiten zu wohlbekannten topologischen Räumen. Um welche Räume handelt es sich?

(a) Die leere Theorie.

(b) Die Theorie mit keinerlei atomaren Propositionen und $\top \vdash \bot$ als einzigem Axiom.

(c) Die Theorie mit genau einer atomaren Proposition φ und keinen Axiomen.

(d) Die Theorie mit je einer atomaren Proposition φ_x für jedes Element x einer Menge X und den Axiomen $\top \vdash \bigvee_{x \in X} \varphi_x$ und $\varphi_x \wedge \varphi_y \vdash \bigvee\{\top \mid x = y\}$.

Aufgabe 3. *Isomorphismen von Rahmen*

Sei $f : L \to S$ ein Morphismus von Rahmen. Zeige, dass f genau dann ein Umkehrmorphismus von Rahmen besitzt, wenn f surjektiv ist und die Ordnung reflektiert (d. h. $f(u) \leq f(v) \Rightarrow u \leq v$).

Aufgabe 4. *Zur nützlichen Illusion von Punkten*

Sei $\mathbb{R}$ die klassifizierende Örtlichkeit der Theorie $\mathbb{T}_\mathrm{d}$ der dedekindschen Schnitte mit ihrem universellen Modell $U_{\mathbb{T}_\mathrm{d}}$. Sei ein Morphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Forderung gegeben, dass das zurückgezogene Modell $f^{-1}U_{\mathbb{T}_\mathrm{d}}$ folgendes Modell M ist:

$$[\![L_q]\!]_M := \bigvee\{\top \mid q < 3\} \text{ für } q \in \mathbb{Q}, \quad [\![U_q]\!]_M := \bigvee\{\top \mid q > 3\} \text{ für } q \in \mathbb{Q}.$$

(a) Zeige: Der induzierte Morphismus $\mathrm{Pt}(f) : \mathrm{Pt}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pt}(\mathbb{R})$ ist tatsächlich die konstante Funktion $\mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$, $x \mapsto 3$.

Hinweis. Notiere zunächst, wie allgemein $\mathrm{Pt}(f) : \mathrm{Pt}(X) \to \mathrm{Pt}(Y)$ für einen Örtlichkeitsmorphismus $f : X \to Y$ aussieht. Erinnere dich an die Identifizierung $\mathrm{Pt}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_\mathrm{d}$.

(b) Die allgemeine Theorie liefert, dass die Funktion $\mathrm{Pt}(f)$ stetig ist. Es gibt also zu jeder Schranke $\varepsilon > 0$ und jeder Zahl $x \in \mathbb{R}_\mathrm{d}$ ein passendes δ. Schürfe die relevanten Beweise, um zu klären, welches δ die allgemeine Theorie liefert.

Übungsblatt 10+11 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Die Ringgarbe stetiger Funktionen als Körper*

Sei C die Garbe der stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum X.

(a) Zeige: $X \models \ulcorner C$ ist mit den üblichen Verknüpfungen ein Ring$\urcorner$.

(b) Sei $f \in C(U)$. Zeige: Die Funktion f besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses in $C(U)$, wenn $U \models \ulcorner f$ invertierbar$\urcorner$, das heißt wenn $U \models \exists g : C.\ fg = 1$.

(c) Zeige: $X \models \forall f : C.\ \neg(\ulcorner f \text{ inv.}\urcorner) \Rightarrow f = 0$, aber $X \not\models \forall f : C.\ f = 0 \vee \ulcorner f \text{ inv.}\urcorner$.

(d) Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Zeige in klassischer Metalogik: $\mathbb{C} \models \forall f : \mathcal{O}.\ \forall g : \mathcal{O}.\ f = g \vee \neg(f = g)$.

Aufgabe 2. *Mehr zum Spektrum*

Sei A ein Ring.

(a) Zeige: Ist A reduziert, so ist $\mathcal{O}_A$ aus Sicht von $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ anonym noethersch.

Hinweis. Ein Ring ist genau dann *anonym noethersch*, wenn jedes seiner Ideale *nicht nicht* endlich erzeugt ist. *Tipp.* Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathcal{O}_A$ in folgendem Sinn ein Körper ist: Ist ein Element nicht invertierbar, so ist es Null.

(b) Zeige: Ist A reduziert, so $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A) \models \forall x : \mathcal{O}_A.\ \neg\neg(x = 0) \Rightarrow x = 0$.

(c) Zeige: Der Kern einer surjektiven Matrix über A ist lokal frei.

Hinweis. Zeige die Behauptung nur für den Fall, dass A lokal ist (bringe dazu die Matrix durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf eine rechteckige Diagonalform). Spreche dann das T-Wort.

Aufgabe 3. *Über den generischen Ring und den generischen lokalen Ring*

(a) Zeige: $\mathrm{PSh}(\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}) \models \forall x : U.\ \neg\neg(x = 0)$.

Hinweis. Es ist $\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ die duale Kategorie der Kategorie der endlich präsentierten Ringe (Ringe der Form $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$). Ein Morphismus $R \to S$ in dieser Kategorie ist ein Ringhomomorphismus $S \to R$. Diese Kategorie sei mit der trivialen Bedeckung, in der nur einelementige Mengen bestehend aus Identitätsmorphismen als Überdeckungen zählen, versehen. Es ist U der *generische Ring*, die Garbe mit $U(A) = A$. Mit „$\mathrm{PSh}(\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}})$“ ist die Kategorie der Garben über $\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ gemeint; das „P“ betont nur die Trivialität der Bedeckung.

(b) Sei $\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ mit der *Zariski-Bedeckung* versehen: Genau Mengen der Form $\{A[f_1^{-1}] \to A, \ldots, A[f_n^{-1}] \to A\}$, wobei $f_1, \ldots, f_n$ Elemente von A mit $1 = \sum_i f_i$ sind, gelten als Überdeckung von A. Sei U der *generische lokale Ring*, gegeben durch $U(A) = A$.

Zeige: $\mathrm{Sh}(\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}) \models \forall x : U.\ \neg(x = 0) \Rightarrow \ulcorner x$ invertierbar$\urcorner$.

Aufgabe 4. *Topologische Bedeutung von Doppelnegation und eindeutiger Existenz*

Sei X eine Örtlichkeit.

(a) Sei φ eine Formel über X. Zeige: Genau dann gilt $X \models \neg\neg\varphi$, wenn ein schwach dichtes Offenes u mit $u \models \varphi$ existiert.

Hinweis. Ein Offenes u ist genau dann *schwach dicht*, wenn für jedes Offene v gilt: Ist $u \wedge v = \bot$, so $v = \bot$. *Bemerkung.* Ist U eine offene dichte Teilmenge eines topologischen Raums Y, so ist U als Offenes von $L(Y)$ schwach dicht. *Tipp.* Definiere für die Hinrichtung $u := \bigvee\{v \in \mathrm{Ouv}(X) \mid v \models \varphi\}$.

(b) Sei F eine Garbe auf X und φ eine Formel, in der eine Variable $s : F$ frei vorkommt. Zeige: Genau dann gilt $X \models \exists! s : F.\ \varphi$, wenn auf jedem Offenen u genau ein Schnitt $s_0 \in F(u)$ mit $u \models \varphi[s_0/s]$ existiert.

Aufgabe 5. *Die interne Sprache von* Set

Sei φ eine Formel, in der möglicherweise Mengen, Elemente dieser Mengen und Abbildungen vorkommen. Zeige: Genau dann gilt φ, wenn $\mathrm{Sh(pt)} \models \varphi$.

Hinweis. Sofern Mengen A in φ vorkommen, müssen diese bei „$\mathrm{Sh(pt)} \models \varphi$“ als die induzierten konstanten Garben $\underline{A}$ gelesen werden. Entsprechend müssen Elemente und Abbildungen interpretiert werden. Die Aufgabe ist auch dann noch interessant, wenn φ eine propositionale Formel ist; beschränke dich gegebenenfalls auf diesen Fall.

Aufgabe 6. *Zum Omnibustheorem über die interne Sprache*

Sei U ein Objekt eines Situs $\mathcal{C}$. Sei φ eine Formel über U.

(a) Sei $p : V \to U$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Zeige: Falls $U \models \varphi$, so $V \models p^*\varphi$.

(b) Sei $M \in \mathrm{Cov}(U)$. Zeige: Falls $V \models p^*\varphi$ für alle $(V \xrightarrow{p} U) \in M$, so $U \models \varphi$.

(c) Sei ψ eine Formel über U. Zeige: Falls $U \models \varphi$ und $\varphi \vdash \psi$ intuitionistisch, so $U \models \psi$.

Tipp. Beweise mit Induktion folgende allgemeinere Aussage: Seien φ und ψ Formeln über U mit freien Variablen $\vec{x}$. Falls $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$, dann $U \models \forall \vec{x}.\ (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Aufgabe 7. *Kategorielles zum syntaktischen Situs*

Sei $\mathbb{T}$ eine (nicht notwendigerweise propositionale) geometrische Theorie. Der *syntaktische Situs* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ...

- hat als Objekte formale Ausdrücke der Form $\{\vec{x}.\ \varphi\}$, wobei $\vec{x}$ ein beliebiger Kontext und φ eine Formel im Kontext $\vec{x}$ ist. Zwei solche Ausdrücke wollen wir als gleich ansehen, wenn sie sich nur in der Wahl der Variablennamen unterscheiden.
- hat als Morphismen $\{\vec{x}.\ \varphi\} \to \{\vec{y}.\ \psi\}$ Äquivalenzklassen von *funktionalen Formeln* θ im Kontext $\vec{x}, \vec{y}$ (dabei seien ohne Einschränkung $\vec{x}$ und $\vec{y}$ disjunkt). Eine Formel θ in diesem Kontext heißt genau dann *funktional*, wenn $\mathbb{T}$ zeigt, dass

$$\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \varphi \wedge \psi, \qquad \varphi \vdash_{\vec{x}} \exists \vec{y}.\ \theta, \qquad \theta \wedge \theta[\vec{y}'/\vec{y}] \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y}'} \vec{y}' = \vec{y}.$$

  Zwei solche Formeln θ, θ' sind genau dann äquivalent, wenn $\mathbb{T}$ zeigt, dass

$$\theta \wedge \theta'[\vec{y}'/\vec{y}] \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y}'} \vec{y} = \vec{y}'.$$

  Die Komposition $\{\vec{x}.\ \varphi\} \xrightarrow{[\theta]} \{\vec{y}.\ \psi\} \xrightarrow{[\xi]} \{\vec{z}.\ \chi\}$ ist $[\exists \vec{y}.\ \theta \wedge \xi]$.
- hat als Überdeckungen eines Objekts $\{\vec{y}.\ \psi\}$ genau diejenigen Morphismenmengen M, für die $\mathbb{T}$ zeigt:

$$\psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{(\{\vec{x}.\,\varphi\} \xrightarrow{[\theta]} \{\vec{y}.\,\psi\}) \in M} \exists \vec{x}.\ \varphi$$

(a) Was sind die Identitätsmorphismen in $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$?

(b) Zeige, dass $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$ ein terminales Objekt, ein initiales Objekt, Produkte und Faserprodukte besitzt.

(c) Seien φ und ψ geometrische Formeln im Kontext $\vec{x}$. Zeige: Genau dann gilt $\{\vec{x}.\ \varphi\} \models \psi[\ldots]$, wenn $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ modulo $\mathbb{T}$.

Hinweis. In der Formel ψ kommen möglicherweise Sorten und Terme dieser Sorten vor. Die Schreibweise „$\psi[\ldots]$“ soll andeuten, dass statt einer Sorte A die Garbe $\{\vec{x}.\ \varphi\} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}(\{\vec{x}.\ \varphi\}, \{a : A.\ \top\})$ und statt einem Term der entsprechende Schnitt dieser Garbe gelesen werden soll. Die Aufgabe ist auch dann noch interessant, wenn der Kontext leer ist und in ψ keine Sorten und Terme vorkommen. Beschränke dich gegebenenfalls auf diesen Fall.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Wintersemester 2017/2018

Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Erste Schritte zu einem Wörterbuch für die algebraische Geometrie*

Sei M ein A-Modul. Die Setzung $M^\sim(f) := M[f^{-1}]$ definiert eine Garbe auf $\mathcal{C}_A$.

(a) Erkläre, wie $M^\sim$ aus Sicht von $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ zu einem Modul über $\mathcal{O}_A$ wird.

(b) Zeige: Genau dann ist M endlich erzeugt, wenn es $M^\sim$ aus Sicht von $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ ist.

(c) Sei A reduziert und M endlich erzeugt. Zeige: Ist Null das einzige Element $f \in A$, sodass $M[f^{-1}]$ ein freier $A[f^{-1}]$-Modul endlichen Rangs ist, so ist $1 = 0$ in A.

Tipp. Zeige intern, dass M *nicht nicht* endlich frei ist. Aufgabe 3(d) von Blatt 1 ist dazu hilfreich. Schau dir dann die Übersetzung dieser internen Aussage an. Herzlichen Glückwunsch, du hast soeben (einen Teil von) Grothendiecks Lemma zu generischer Freiheit bewiesen.

(d) Sei A als Menge endlich. Ist dann $\mathcal{O}_A$ aus Sicht von $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ endlich?

Bemerkung. Verwende folgende Definition: Eine Menge X ist genau dann *(Kuratowski-)endlich*, wenn es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt, sodass jedes Element von X gleich einem der Elemente x_i ist.

Aufgabe 2. *Erste Schritte zu einem Wörterbuch für die Differentialgeometrie*

Sei $p : E \to X$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Seien auf den Fasern von p so $\mathbb{R}$-Vektorraumstrukturen gegeben, dass p ein Vektorbündel wird. Sei V die Garbe der stetigen Schnitte von p.

(a) Erkläre, wie V aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ ein Vektorraum über C, der Garbe der stetigen Funktionen, wird.

(b) Zeige: Aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ ist V ein freier C-Modul endlichen Rangs.

Hinweis. Per Definition ist $V(U) = \{s : U \to E \mid s \text{ stetig und } s \fatsemi p = \mathrm{id}|_U\}$.

Aufgabe 3. *Klassifizierende Örtlichkeiten als spezielle klassifizierende Topoi*

Sei $\mathbb{T}$ eine propositionale geometrische Theorie. Zeige, dass die Topoi $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_\mathbb{T})$ und $\mathrm{Sh}(L(\mathbb{T}))$ zueinander äquivalent sind.

Bemerkung. Wenn du nicht weißt, wann zwei Kategorien zueinander äquivalent sind, dann versuche informal herauszuarbeiten, inwiefern sich die Siten $\mathcal{C}_\mathbb{T}$ und $\mathrm{Ouv}(L(\mathbb{T}))$ ähneln.

Aufgabe 4. *Ein naiver Versuch, den Körper mit einem Element zu fassen*

Vom *Körper mit einem Element* erwartet man, dass er einen Morphismus in $\mathbb{Z}$ hinein besitzt. Man kann zeigen, dass kein Körper im gewöhnlichen Sinn das leistet. Untersuche, ob der Körper $\mathbb{Z}/(p_0)$ im Topos $\mathrm{Sh}(P)$ das leistet. Dabei ist P der diskrete Raum der Primzahlen und p_0 die *generische Primzahl.*

Aufgabe 5. *Die Galoisgruppe einer unendlichen Erweiterung*

Sei $L|K$ eine (nicht notwendigerweise endliche) galoissche Körpererweiterung.

(a) Definiere die propositionale geometrische Theorie $\mathbb{T}$ der Körperisomorphismen $L \to L$ über K. Verwende als atomare Propositionen die Symbole $\varphi_{x,y}$, die anschaulich ausdrücken sollen, dass der zu beschreibende Körperisomorphismus x auf y schickt.

Metahinweis. Hole dir einen Tipp ab, falls du nicht weiter kommst, damit du die weiteren Teilaufgaben bearbeiten kannst.

(b) Erkläre, wie wir einen Multiplikationsmorphismus $L(\mathbb{T}) \times L(\mathbb{T}) \to L(\mathbb{T})$ angeben können. Wie wird $L(\mathbb{T})$ zu einem Gruppenobjekt in der Kategorie der Örtlichkeiten?

(c) Zeige, dass man auf diejenigen Axiome von $\mathbb{T}$, die Injektivität und Surjektivität ausdrücken, verzichten kann.

Bemerkung. Wenn du diese Behauptung konstruktiv zeigen möchtest, dann setze voraus, dass jedes Element von L Null oder invertierbar ist und dass jedes Element von L Nullstelle eines normierten separablen Polynoms über K ist, das über L in Linearfaktoren zerfällt.

(d) Zeige in klassischer Logik, dass $L(\mathbb{T})$ mit der von der topologischen Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ induzierten Örtlichkeit übereinstimmt.

Hinweis. Es ist $\mathrm{Gal}(L|K)$ die Menge aller Körperisomorphismen $L \to L$ über K. Ist E eine endliche galoissche Zwischenerweiterung und $\alpha \in \mathrm{Gal}(E|K)$, so ist $U_\alpha := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K) \mid \sigma|_E = \alpha\}$. Eine Teilmenge von $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist genau dann offen, wenn sie Vereinigung von Teilmengen der Form U_α ist. Verwende ohne Beweis, dass $\mathrm{Gal}(L|K)$ kompakt ist. Verwende mit oder ohne Beweis, dass zudem die Mengen U_α kompakt sind. Der Satz übers primitive Element ist nützlich, aber nicht nötig, zur Bearbeitung der Aufgabe.

Übungsblatt 13 zu Garben und Logik

Aufgabe 1. *Faserprodukt von Örtlichkeiten*

Zeige, dass die Kategorie der Örtlichkeiten Faserprodukte besitzt.

Tipp. Erinnere dich, wie wir Produkte von Örtlichkeiten als klassifizierende Örtlichkeiten konstruierten, und verallgemeinere diese Konstruktion auf passende Art und Weise.

Aufgabe 2. *Der Topos der G-Mengen*

Sei G eine Gruppe. Zeige: Die Punkte des Topos $\mathrm{PSh}(BG)$ stehen in kanonischer Bijektion zu den G-Torsorn.

Tipp. Die Aufgabe ist mit dem Resultat aus der Vorlesung, dass die Punkte in kanonischer Bijektion zu den flachen Funktoren $BG \to \mathrm{Set}$ stehen, gut machbar. *Hinweis.* Die Kategorie BG hat genau ein Objekt, $\star$. $\mathrm{Hom}_{BG}(\star, \star) := G$, die Morphismenverknüpfung ist durch die Gruppenverknüpfung gegeben. Ein G-Torsor ist eine G-Menge M (also eine Menge zusammen mit einer Linkswirkung von G) mit $\forall x, y \in M.\ \exists! g \in G.\ g \cdot x = y$ und $\exists x \in M.\ \top$.

Aufgabe 3. *Wertschätzung des starken Zwischenwertsatzes*

(a) Sei X ein topologischer Raum. Sei $f_x : \mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ eine stetige Familie stetiger Funktionen (das heißt, dass die Abbildung $X \times \mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ mit $(x, a) \mapsto f_x(a)$ stetig ist). Zeige, dass der induzierte Morphismus $f : C \to C$ in $\mathrm{Sh}(X)$ aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ punktweise stetig ist.

Hinweis. Auf $U \subseteq X$ ist $f_U : C(U) \to C(U)$ durch $\varphi \mapsto (x \mapsto f_x(\varphi(x)))$ gegeben.

(b) Finde ein explizites Beispiel für eine stetige Familie stetiger Funktionen, sodass der induzierte Morphismus f zwar die Voraussetzungen, aber nicht die Behauptung des Zwischenwertsatzes in der Formulierung „jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) < 0$ und $f(1) > 0$ besitzt eine Nullstelle“ erfüllt.

Aufgabe 4. *Minima von Mengen natürlicher Zahlen II*

In Aufgabe 3 von Blatt 1 sahen wir: Es lässt sich intuitionistisch nicht zeigen, dass jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen ein Minimum besitzt. Gib nun ein explizites Beispiel für diese Situation in einem Garbentopos deiner Wahl an.

Hinweis. Hole dir bei Bedarf einen Tipp ab.

Aufgabe 5. *Objekt natürlicher Zahlen*

Sei X ein topologischer Raum (oder eine Örtlichkeit). Sei $\underline{\mathbb{N}}$ die konstante Garbe zur Menge $\mathbb{N}$. Präzisiere und beweise:

$$\mathrm{Sh}(X) \models \forall x : P(\underline{\mathbb{N}}).\ ((0 \in x \wedge (\forall n : \underline{\mathbb{N}}.\ n \in x \Rightarrow s(n) \in x)) \Longrightarrow (\forall n : \underline{\mathbb{N}}.\ n \in x)).$$

Aufgabe 6. *Idempotenz der Topossprache*

Sei X eine Örtlichkeit. Sei Y eine Örtlichkeit über X. Sei φ eine Formel über $\top \in \mathrm{Ouv}(Y)$. Erkläre, wie die folgende Behauptung zu verstehen ist, und beweise sie.

$$\mathrm{Sh}(Y) \models \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner \mathrm{Sh}(I(Y)) \models \varphi \urcorner$$

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Universität Augsburg

Wintersemester 2017/2018

Ingo Blechschmidt

Übungsblatt ω zu Garben und Logik

Fragen zum Nachdenken

Diese Fragen müssen sitzen

- Wie beweist man den Gödelschen Unvollständigkeitssatz?
- Wie kann man aus einem Beweis in HA, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, maschinell einen Algorithmus extrahieren, der beliebig viele Primzahlen berechnet?
- Wie zeigt man, dass die Garbe C der stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum X aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ ein Körper in dem Sinn ist, dass jedes nicht-invertierbare Element Null ist?

Grundlagen

- Auf welche zwei verschiedenen Arten und Weisen lässt sich der Satz „jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum“ intuitionistisch retten? Welche algorithmischen Interpretationen haben die beiden Möglichkeiten? Folgt eine der Möglichkeiten aus der Doppelnegationsübersetzung?
- Welche der de Morganschen Gesetze lassen sich intuitionistisch beweisen?
- Lässt sich intuitionistisch zeigen, dass jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ endlich erzeugt ist? Falls nein, wie sieht eine Deutung im Realisierbarkeitsmodell aus?
- Lässt sich intuitionistisch zeigen, dass es für keine Menge X eine Surjektion von X in die Potenzmenge von X gibt?
- Was ist ein lokaler Operator ∇? Was ist die ∇-Übersetzung und welche Rolle spielt sie?
- Wie viele Axiome hat HA?
- Kann man aus jedem Beweis in PA, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, einen Beweis in HA derselben Behauptung extrahieren?
- Was hat man davon, wenn man auf das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten verzichtet?

Arithmetisierung von Syntax

- ZFC weist die Totalität von vielen unberechenbaren Funktionen wie der Haltefunktion oder der Busy-Beaver-Funktion nach. Wie passt das mit dem Resultat zusammen, dass jede (in einem IQ umfassenden rekursiv axiomatisierbaren formalen System) darstellbare Funktion berechenbar ist?
- Was ist ein Beispiel für eine Funktion, die nicht primitiv rekursiv im engeren Sinn ist?
- Muss man oder muss man nicht, zum Nachweis, dass in HA jede berechenbare Funktion darstellbar ist, nachprüfen, ob HA den chinesischen Restsatz beweist?

- Ist es möglich, dass eine diophantische Gleichung eine Lösung hat, Peano-Arithmetik diesen Umstand aber nicht beweist? Wie steht's um die konverse Situation: Kann eine diophantische Gleichung unlösbar sein, ohne dass PA diesen Umstand beweist?
- Mit dem Diagonalisierungslemma lässt sich eine Formel von HA konstruieren, die ihre eigene Beweisbarkeit ausdrückt. Ist diese Formel in HA beweisbar?
- Wieso sind Bedingungen wie die HBL-Bedingungen für den Beweis von Gödel II nötig?
- Was ist ein Beispiel für eine Formel, die im Standardmodell $\mathbb{N}$ von HA stimmt, aber in HA nicht beweisbar ist?
- Kann es Formeln geben, die im Standardmodell $\mathbb{N}$ stimmen und sogar in PA nicht beweisbar sind?
- Was ist ein Beispiel für eine Formel φ mit freier Variable x, sodass PA für jede Zahl n die Formel $\varphi[\underline{n}/x]$ nachweist, nicht aber $\forall x : N.\ \varphi$?
- Wie beweist man Gödel I?
- Inwiefern folgt aus Gödel I schon Gödel II?
- Sei φ eine Formel von PA. Kann man erwarten, dass PA nachweist, dass aus PA $\vdash \varphi$ schon φ folgt?
- Wo scheitert ein Versuch, innerhalb von PA oder ZFC ein Wahrheitsprädikat zu definieren?
- Kann HA die Konsistenz der Theorie der Gruppen (eine Sorte G; Funktionssymbole e, $\circ$, $(\cdot)^{-1}$; Gruppenaxiome) nachweisen? Ergibt es Sinn zu fragen, ob auch die Theorie der Gruppen ihre Konsistenz nachweisen kann?

Semantische Vollständigkeit

- In der Ringtheorie lernt man: Ist ein Ring R ein Integritätsbereich und zu einem weiteren Ring S isomorph, so ist auch S ein Integritätsbereich. Aus welcher viel allgemeineren Beobachtung logischer Natur folgen Erkenntnisse wie diese?
- Gibt es Ringe, die nicht zueinander isomorph sind, aber trotzdem dieselben in der Sprache der Ringe formulierbaren Eigenschaften haben?
- Sei M ein über den Vollständigkeitssatz konstruiertes Modell. Wieso wird man intuitionistisch im Allgemeinen nicht $(M \models \varphi) \vee (M \not\models \varphi)$ zeigen können? Welche klassisch äquivalente Formulierung dient als Ersatz?
- Gibt es ein abzählbares Modell von ZFC? Gibt es ein überabzählbares Modell von PA oder HA?
- Wie viele Modelle besitzt ein klassisches konsistentes System, das die Voraussetzungen von Gödel I erfüllt, stets? (bis auf elementare Äquivalenz)
- Welche Bezugsquellen für Nichtstandardmodelle von Peano-Arithmetik gibt es?
- In manchen Nichtstandardmodellen von Peano-Arithmetik gilt Incon(PA), diese Modelle empfinden PA also als inkonsistent. Was wissen wir über den in solchen Modellen vorhandenen Beweis der Inkonsistenz von PA?
- Gilt Incon(PA) in allen Nichtstandardmodellen von Peano-Arithmetik?
- Gibt es eine Turingmaschine, deren Halteverhalten von PA unabhängig ist? (Sodass PA also weder beweist, dass die Maschine hält, noch beweist, dass sie nicht hält?) Würde eine solche Maschine tatsächlich halten oder tatsächlich nicht halten?

Realisierbarkeitstheorie

- Welche Aussagen unterscheiden die folgenden Welten voneinander: was HA beweisen kann; was PA beweisen kann; was in $\mathbb{N}$ stimmt; was in Kleenes ursprünglichem Realisierbarkeitsmodell stimmt.
- Was ist der algorithmische Inhalt des gewöhnlichen Induktionsprinzips? Was ist der von transfiniter Induktion bis ω oder bis $\omega \cdot 2$?
- Was ist der algorithmische Inhalt von Markovs Prinzip?
- Eine Menge X heißt genau dann *absuchbar*, wenn $\forall f : \mathbb{B}^X.\ (\exists x : X.\ f(x) = 1) \vee (\forall x : X.\ f(x) = 0)$. Was hat im Realisierbarkeitsmodell die Absuchbarkeit einer Assembly X mit Kompaktheit zu tun?
- „Jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.“ Was ist dazu zu sagen?
- Lässt sich intuitionistisch zeigen, dass stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind?
- Was besagt das schwache Lemma von Kőnig? Lässt es sich intuitionistisch zeigen? Gilt es im Realisierbarkeitsmodell?
- Ist $\mathrm{HA}^\omega + \mathrm{AC}_{N \to N}$ konservativ über HA^ω?
- Ist $\mathrm{HA}^\omega + \mathrm{AC}_{N \to N}$ konservativ über HA?
- Was ist die Disjunktionseigenschaft von HA? Wieso erwartet man sie und wie beweist man sie?
- Ist das abzählbare Auswahlaxiom als völlig unkonstruktiv abzutun?
- In der Kategorie der maßvollen Mengen sind die Trägermengen aller Objekte abzählbar. Wieso schlägt sich dieser Fakt nicht in der internen Welt nieder? Wie kann es sein, dass die Realisierbarkeitswelt glaubt, dass es überabzählbare Mengen gibt?
- Lässt sich intuitionistisch zeigen, dass es keine Surjektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ gibt? Wie steht's um die Existenz einer Injektion $\mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
- Bei welcher Programmieraufgabe kommt die Macht von Superturingmaschinen erst richtig zur Geltung?
- Was sind einige Unterschiede zwischen dem mit gewöhnlichen Turingmaschinen konstruiertem Realisierbarkeitsuniversum und dem mit Superturingmaschinen konstruierten?
- Wie zeigt man, dass Heyting-Arithmetik nicht Markovs Prinzip beweist?
- Wie zeigt man, dass alle Funktionen, die Heyting-Arithmetik als total nachweist, primitiv rekursiv im erweiterten Sinn sind?

Konstruktive Analysis

- Welche zwei wichtigen Konstruktionsmöglichkeiten für die reellen Zahlen gibt es?
- Was ist der intuitionistische Status des Zwischenwertsatzes?
- An welcher Stelle scheitert der übliche Bisektionsbeweis des Zwischenwertsatzes konstruktiv?
- In der Numerik ist es oft leichter, eine Lösung eines gewissen Problems zu finden, wenn die Lösung eindeutig ist. Wie schlägt sich das in konstruktiver Mathematik nieder?

- Welchen Ersatz für die Trichotomie der Ordnung gibt es in konstruktiver Analysis?
- Kann man die Maximumsoperation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ konstruktiv definieren? Wie steht es um die Betragsfunktion? Sofern möglich, wie sieht die Definition in deinem Lieblingsmodell für die reellen Zahlen genau aus?
- Unter welchen Voraussetzungen sind die Cauchy-Zahlen cauchyvollständig?
- Wieso geht man konstruktiv von Cauchy-Folgen zu Cauchy-Prozessen über?
- Wieso kann man die Signumfunktion nicht konstruktiv definieren?
- Welche der folgenden Körperbedingungen werden von den Dedekind-Zahlen erfüllt, und wieso? (a) Jede Zahl ist Null oder invertierbar. (b) Ist eine Zahl nicht Null, so ist sie invertierbar. (c) Ist eine Zahl nicht invertierbar, so ist sie Null.
- Kann man intuitionistisch zeigen, dass jedes normierte Polynom ungeraden Grads mit rationalen Koeffizienten eine Nullstelle in den dedekindschen reellen Zahlen besitzt?

Beweisschürfung

- Worum ging es bei Hilberts Programm? Wieso gilt es in voller Allgemeinheit als gescheitert?
- Was versteht man unter Beweisschürfung (proof mining)? Was ist ein einfaches Beispiel?
- Von welcher logischen Form sind Dialectica-Übersetzungen stets?
- Wie motiviert man die Definition der Dialectica-Übersetzung der Implikation? Welche klassischen Axiome muss man für diese Motivation annehmen?
- Welche klassischen Prinzipien werden durch die Dialectica-Übersetzung zu intuitionistischen Tautologien?
- Bei Aussagen welcher Form tritt der Unterschied zwischen der Realisierbarkeitsinterpretation und der Dialectica-Übersetzung erstmals zu Tage? (Probiere es aus! Übersetze jeweils: φ_0, $\forall x.\ \varphi_0$, $\exists x.\ \varphi_0$, $\ldots$)
- Welchen Trick kodiert die Dialectica-Übersetzung der Doppelnegation?
- Was ist das generische Primideal?
- Wie eliminiert man die Verwendung von Primidealen in der Algebra?
- Was hat das generische Primideal mit Örtlichkeiten und der internen Sprache von Topoi zu tun?

Örtlichkeiten

- Wie sieht der von einem topologischen Raum induzierte Rahmen aus? Wieso besitzt er beliebige Suprema? Wieso gilt das Distributivgesetz? Wieso gilt im Allgemeinen nicht auch das duale Distributivgesetz?
- Legt die induzierte Örtlichkeit $L(X)$ eines topologischen Raums X den Raum schon fest?
- Ist der Funktor L von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Örtlichkeiten volltreu?
- Durch welchen Rahmen ist die einpunktige Örtlichkeit gegeben? Welche Theorie klassifiziert diese Örtlichkeit?

- Gibt es eine Örtlichkeit X, sodass es für jede Örtlichkeit Y genau einen Morphismus $X \to Y$ von Örtlichkeiten gibt?
- Welche propositionale geometrische Theorie besitzt in jeder Örtlichkeit genau ein Modell? Welche besitzt nur in der leeren Örtlichkeit ein Modell?
- Sind Unterörtlichkeiten räumlicher Örtlichkeiten wieder räumlich?
- Wie viele Unterörtlichkeiten besitzt die einpunktige Örtlichkeit? Hängt die Antwort von der gewählten Metatheorie ab?
- Welche Theorien klassifizieren Unterörtlichkeiten?
- Wie hängen Unterörtlichkeiten mit lokalen Operatoren (aus dem ersten Teil der Vorlesung) zusammen?
- Was ist ein Beispiel für eine nichttriviale Örtlichkeit ohne Punkte?
- Was sind Vorteile davon, dass Punkte zur Definition von Örtlichkeiten nicht fundamental sind? (Denke an konstruktive Belange und Unterörtlichkeiten.)
- Wie konstruiert man die klassifizierende Örtlichkeit einer propositionalen geometrischen Theorie?
- Können zwei unterschiedliche propositionale geometrische Theorien isomorphe klassifizierende Örtlichkeiten haben?
- Wie kann man zum Angeben von Örtlichkeitsmorphismen $X \to Y$ die praktische Illusion von Punkten aufrecht erhalten?
- Welche anschauliche Interpretation besitzen die Punkte einer klassifizierenden Örtlichkeit? (Denke an Modelle.) Welche geometrische Bedeutung haben in diesem Bild die Offenen der klassifizierenden Örtlichkeit?
- Was ist die wesentliche Verallgemeinerung, die Örtlichkeiten im Vergleich zu topologischen Räumen bringen?
- Was ist die wesentliche Verallgemeinerung, die Siten im Vergleich zu Örtlichkeiten bringen?
- Wie ist folgendes Wörterbuch zu verstehen? Raum $\widehat{=}$ logische Theorie, Punkt $\widehat{=}$ Modell der Theorie, offene Menge $\widehat{=}$ propositionale Formel, Garbe $\widehat{=}$ Formel aus Prädikatenlogik, stetige Abbildung $\widehat{=}$ Transformation von Modellen, die in geometrischer Logik definierbar ist. (Der letzte Punkt ist so, wie er formuliert ist, etwas irreführend. Inwiefern?)
- Wir notierten, dass jede Örtlichkeit eine gewisse propositionale geometrische Theorie klassifiziert. Welche Ähnlichkeit besteht zwischen den Axiomen dieser Theorie und den Filteraxiomen? Kannst du diese Beobachtung erklären?

Topostheorie

- Welche Bezugsquellen für Siten gibt es?
- Was ist eines der vielen Beispiele, dass in Topoi im Allgemeinen nicht klassische Logik gilt?
- Ist die Garbe der Kontinente aus interner Sicht bewohnt?
- Was versteht man unter dem Motto, übliche Mathematik sei Mathematik über dem Punkt?
- Was ist an der internen Sprache des Topos Sh(pt) so besonders?

- Was versteht man bei der internen Sprache unter Monotonie, Lokalität und Korrektheit?
- Was drücken die Sitenaxiome anschaulich aus? (Kann etwa im Fall $\mathrm{Ouv}(X)$ gut erklärt werden.)
- Wieso hängt das Omnibustheorem ganz wesentlich davon ab, dass die drei Sitenaxiome erfüllt sind? Wo gehen sie im Beweis ein?
- Wie konstruiert man den syntaktischen Situs zu einer geometrischen Theorie?
- Wie hängen klassifizierende Örtlichkeiten mit klassifizierenden Topoi zusammen?
- Legt der Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ einer Örtlichkeit X die Örtlichkeit schon fest? Kann man also aus $\mathrm{Sh}(X)$ den der Örtlichkeit zugrundeliegenden Rahmen rekonstruieren?
- Inwieweit kann man einen Topos als eine Art verallgemeinerten Raum ansehen? Welchem Topos entspricht in dieser Sichtweise ein gegebener topologischer Raum?
- Was ist ein Beispiel für einen nichttrivialen Topos ohne Punkte?
- Was ist ein Beispiel für einen Topos $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} \models \bot$? Wie weist man das nach?
- Sei X eine Örtlichkeit. Gibt es stets ein Offenes u mit $u \models \bot$?
- Welches Körperaxiom erfüllt C, die Garbe der stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum? Welches Körperaxiom erfüllt sie nicht? Zu welcher falschen externen Aussage übersetzt es sich?
- Wie kann man anhand eines Beispiels in einem Garbentopos plastisch sehen, dass sich intuitionistisch für (dedekindsche) reelle Zahlen nicht nachweisen lässt, dass aus $\neg(x \leq y)$ folgt, dass $x > y$? Und wie wird geometrisch klar, dass die Implikation $\neg(x < y) \Rightarrow x \geq y$ durchaus intuitionistisch beweisbar ist?
- Sei $f_\lambda : \mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ eine stetige Familie stetiger Abbildungen (das heißt, dass die Abbildung $f : X \times \mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ mit $(\lambda, a) \mapsto f_\lambda(a)$ stetig ist). Inwieweit sieht diese Familie aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ wie eine einzelne Abbildung $\mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ aus? Was bedeutet es, wenn diese einzelne Abbildung aus Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ eine Nullstelle besitzt? (Erinnere dich daran, dass die externe Interpretation von $\mathbb{R}_\mathrm{d}$ die Garbe C der stetigen Funktionen ist.)
- Wieso ist nicht zu erwarten, dass der Zwischenwertsatz in seiner klassischen Formulierung („jede punktweise stetige Funktion $f : \mathbb{R}_\mathrm{d} \to \mathbb{R}_\mathrm{d}$ mit $f(-1) < 0$ und $f(1) > 0$ besitzt eine Nullstelle“) konstruktiv zeigbar ist? (Was würde er denn interpretiert in $\mathrm{Sh}(X)$, wobei X ein topologischer Raum ist, besagen?)
- Kann man intuitionistisch zeigen, dass die (dedekindschen) komplexen Zahlen im üblichen Sinn algebraisch abgeschlossen sind („jedes normierte Polynom vom Grad ≥ 1 besitzt eine Nullstelle“)? (Denke dran, dass die interne Konstruktion der dedekindschen komplexen Zahlen die Garbe der stetigen komplexwertigen Funktionen liefert.)
- Welche geometrische Interpretation besitzt die Tatsache, dass die Aussage „jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum“ nicht intuitionistisch beweisbar ist?
- Wie geht man vor, wenn man die interne Sprache von Topoi einsetzen möchte, um Resultate in der Algebra zu erzielen? (Allgemeine Idee und konkretes Beispiel mit Details.)
- Sei $\Omega = P(\{\star\})$ die Menge der Wahrheitswerte. Sei X eine Örtlichkeit. Gibt es Hoffnung, dass die konstante Garbe $\underline{\Omega}$ mit $\Omega_{\mathrm{Sh}(X)} = [\![P(1)]\!]_{\mathrm{Sh}(X)}$ übereinstimmt?
- Jedes Element des generischen Rings ist *nicht nicht* Null. Wie beweist man das? Welche Konsequenzen hat dieser Umstand?

- Kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass jedes Element eines jeden Rings Null ist? Wenn nein, wieso nicht?
- Sei A ein lokaler Ring. Wir möchten zeigen, dass A eine gewisse geometrische Sequenz erfüllt, formuliert in der Sprache der Ringe. Können wir dafür ohne Beschränkung der Allgemeinheit all die folgenden Axiome voraussetzen? die Ringaxiome, das Lokalitätsaxiom und das Axiom $\neg\neg(x = 0)$.
- Wie zeigt man, dass in $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ gilt: Ist ein Element von $\mathcal{O}_A$ nicht invertierbar, so ist es nilpotent. Wie ist hierbei Nilpotenz definiert?
- Wann ist $\mathcal{O}_A$ als Ring von $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_A)$ reduziert?
- Wie kann man das Spektrum eines Rings ohne Rückgriff auf Primideale definieren? Welche Vorteile hat man, wenn man ein solches Vorgehen einsetzt?
- Was ist die geometrische Interpretation der Doppelnegation? (Was ist die realisierbarkeitstheoretische? Was die logische?)